Matrici hessiane

Matrici definite positive e semi-definite positive

Sia $A = (a_{ij})_{ij}$ una matrice $n \times n$ con coefficienti reali. Per ogni vettore $x \in \mathbb{R}^n$, useremo la notazione

$$x^t A x = (x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

Definizione 1. *Sia $A = (a_{ij})_{ij}$ una matrice $n \times n$ con coefficienti reali.*

- *Diciamo che A è semi-definita positiva, se*

$$x^t A x \geq 0 \quad \textit{per ogni vettore} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

- *Diciamo che A è definita positiva, se*

$$x^t A x > 0 \quad \textit{per ogni vettore non-nullo} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

- *Diciamo che A è semi-definita negativa, se*

$$x^t A x \leq 0 \quad \textit{per ogni vettore} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

- *Diciamo che A è definita negativa, se*

$$x^t A x < 0 \quad \textit{per ogni vettore non-nullo} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Osservazione 2. *Ricordiamo che il determinante di una matrice 2×2 è definito come*

$$\det A = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc.$$

Teorema 3. *Sia $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ una matrice simmetrica 2×2. Dimostrare che sono equivalenti:*

(1) A è semi-definita positiva;

(2) $a \geq 0$, $c \geq 0$ e $\det A \geq 0$.

Dimostrazione: Dimostriamo prima che (1) implica (2).

1. Osserviamo che
$$(x,0)\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = ax^2 \qquad \text{e} \qquad (0,y)\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = cy^2.$$
Questo implica che $a \geq 0$ e $c \geq 0$.

2. Osserviamo che
$$(x,y)\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ax^2 + cy^2 + 2bxy \geq 0,$$
per ogni x, y. Considerare i casi seguenti:
   - $a = 0$ e $c = 0$. Dimostrare che $b = 0$.
   - $a \neq 0$. Prendere $y = 1$ e usando che $ax^2 + 2bx + c \geq 0$ dedurre che $(2b)^2 - 4ac \leq 0$.
   - $c \neq 0$. Prendere $x = 1$ e usando che $a + 2by + cy^2 \geq 0$ dedurre che $(2b)^2 - 4ac \leq 0$.

Ora dimostriamo che (2) implica (1). Consideriamo due casi:

- Supponiamo che $a = 0$ oppure $c = 0$ (senza perdità di generalità $c = 0$). Allora anche $b = 0$. Quindi
$$(x,y)\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ax^2 \geq 0.$$

- Supponiamo che $a > 0$ e $c > 0$. Sia $(x,y) \neq (0,0)$. Possiamo assumere che $x \neq 0$. Allora
$$(x,y)\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2\left(a + 2b\frac{y}{x} + c\frac{y^2}{x^2}\right).$$

Ora siccome $(2b)^2 - 4ac \leq 0$ e $c > 0$, abbiamo che
$$a + 2bt + ct^2 \geq 0 \quad \text{per ogni} \quad t \in \mathbb{R}.$$
Quindi
$$(x,y)\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \geq 0.$$

Teorema 4. *Sia* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ *una matrice simmetrica* 2×2. *Dimostrare che sono equivalenti:*

(1) A *è definita positiva;*

(2) $a > 0$, $c > 0$ *e* $\det A > 0$.

Gradiente e matrice hessiana - richiamo delle definizioni

Definizione 5. *Diciamo che una funzione* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *è derivabile se:*

- *fissato* $y \in \mathbb{R}$, *la funzione*
$$x \mapsto F(x,y)$$
è derivabile. Denotiamo la sua derivata (parziale) nella variabile x *con* $\partial_x F$.

- *fissato* $x \in \mathbb{R}$, *la funzione*
$$y \mapsto F(x,y)$$
è derivabile. Denotiamo la sua derivata (parziale) nella variabile y *con* $\partial_y F$.

Definizione 6. *Diciamo che una funzione* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *è derivabile due volte in* x *e in* y, *se* F *è derivabile e le sue derivate parziali* $\partial_x F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *e* $\partial_y F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *sono a loro volta derivabili.*

Definizione 7. *Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile due volte in x ed in y. Il gradiente di F nel punto (x, y) è il vettore*

$$\nabla F(x,y) = \Big(\partial_x F(x,y)\,,\ \partial_y F(x,y)\Big).$$

La matrice hessiana di F nel punto (x, y) è la matrice

$$D^2F(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_{xx}F(x,y) & \partial_{xy}F(x,y) \\ \partial_{yx}F(x,y) & \partial_{yy}F(x,y) \end{pmatrix}.$$

Quando il gradiente e la matrice hessiana non sono calcolati in un punto specifico scriveremo semplicemente

$$\nabla F = \big(\partial_x F,\, \partial_y F\big) \qquad e \qquad D^2F = \begin{pmatrix} \partial_{xx}F & \partial_{xy}F \\ \partial_{yx}F & \partial_{yy}F \end{pmatrix}.$$

Definizione 8. *Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile. Diremo che (x_0, y_0) è un punto critico per la funzione F, se $\nabla F(x_0, y_0) = (0, 0)$.*

Esercizi

Esercizio 9. *Consideriamo la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*

$$F(x,y) = x^2 + 2xy + 3y^2 - 4x + 4y$$

Quali delle affermazioni seguenti sono corrette?

- *(a)* $(1, 3)$ *è un punto critico di F.*
- *(b)* $(4, -2)$ *è un punto critico di F.*
- *(c) La matrice hessiana di F in $(0, 0)$ è definita positiva.*
- *(d) La matrice hessiana di F in $(0, 0)$ è semi-definita positiva.*
- *(e) La matrice hessiana di F in $(0, 0)$ è definita negativa.*
- *(f) La matrice hessiana di F in $(0, 0)$ è semi-definita negativa.*
- *(g) La matrice hessiana di F in $(0, 0)$ non è ne semi-definita positiva ne semi-definita negativa.*

Esercizio 10. *Consideriamo la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*

$$F(x,y) = x^2 - y^2 + 4xy + 20x$$

Quali delle affermazioni seguenti sono corrette?

- *(a)* $(1, -3)$ *è un punto critico di F.*
- *(b)* $(-2, -4)$ *è un punto critico di F.*
- *(c)* $(-2, -1)$ *è un punto critico di F.*
- *(d) F non ha punti critici.*

Esercizio 11. *Consideriamo la funzione* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$F(x,y) = x^2 - y^2 + 4xy + 20x$$

Quali delle affermazioni seguenti sono corrette?

(a) *La matrice hessiana di* F *in* $(0,0)$ *è definita positiva.*

(b) *La matrice hessiana di* F *in* $(0,0)$ *è semi-definita positiva.*

(c) *La matrice hessiana di* F *in* $(0,0)$ *è definita negativa.*

(d) *La matrice hessiana di* F *in* $(0,0)$ *è semi-definita negativa.*

(e) *La matrice hessiana di* F *in* $(0,0)$ *non è ne semi-definita positiva ne semi-definita negativa.*

Esercizio 12. *Consideriamo la funzione* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$F(x,y) = x^2 - y^2 + xy + 20x + 5y + 3$$

Quali delle affermazioni seguenti sono corrette?

(a) *La matrice hessiana di* F *in* $(1,0)$ *è definita positiva.*

(b) *La matrice hessiana di* F *in* $(1,0)$ *è semi-definita positiva.*

(c) *La matrice hessiana di* F *in* $(1,0)$ *è definita negativa.*

(d) *La matrice hessiana di* F *in* $(1,0)$ *è semi-definita negativa.*

(e) *La matrice hessiana di* F *in* $(1,0)$ *non è ne semi-definita positiva ne semi-definita negativa.*

Esercizio 13. *Consideriamo la funzione* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$F(x,y) = x^2 + 3y^2 + 5xy + 20x + 5y + 3$$

Quali delle affermazioni seguenti sono corrette?

(a) *La matrice hessiana di* F *in* $(1,0)$ *è definita positiva.*

(b) *La matrice hessiana di* F *in* $(1,0)$ *è semi-definita positiva.*

(c) *La matrice hessiana di* F *in* $(1,0)$ *è definita negativa.*

(d) *La matrice hessiana di* F *in* $(1,0)$ *è semi-definita negativa.*

(e) *La matrice hessiana di* F *in* $(1,0)$ *non è ne semi-definita positiva ne semi-definita negativa.*

Esercizio 14. *Consideriamo la funzione* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$F(x,y) = x^2 + 3y^2 + 3xy + 20x + 5y + 3$$

Quali delle affermazioni seguenti sono corrette?

(a) *La matrice hessiana di* F *in* $(1,0)$ *è definita positiva.*

(b) *La matrice hessiana di* F *in* $(1,0)$ *è semi-definita positiva.*

(c) *La matrice hessiana di* F *in* $(1,0)$ *è definita negativa.*

(d) *La matrice hessiana di* F *in* $(1,0)$ *è semi-definita negativa.*

(e) *La matrice hessiana di F in $(1,0)$ non è ne semi-definita positiva ne semi-definita negativa.*

Esercizio 15. *Consideriamo la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*

$$F(x,y) = 2x^2 + y^2 + 3xy + 20x + 5y + 3$$

Quali delle affermazioni seguenti sono corrette?

(a) *La matrice hessiana di F in $(1,0)$ è definita positiva.*

(b) *La matrice hessiana di F in $(1,0)$ è semi-definita positiva.*

(c) *La matrice hessiana di F in $(1,0)$ è definita negativa.*

(d) *La matrice hessiana di F in $(1,0)$ è semi-definita negativa.*

(e) *La matrice hessiana di F in $(1,0)$ non è ne semi-definita positiva ne semi-definita negativa.*

Esercizio 16. *Consideriamo la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*

$$F(x,y) = -2x^2 - y^2 + 2xy + 20x + 5y + 3$$

Quali delle affermazioni seguenti sono corrette?

(a) *La matrice hessiana di F in $(1,0)$ è definita positiva.*

(b) *La matrice hessiana di F in $(1,0)$ è semi-definita positiva.*

(c) *La matrice hessiana di F in $(1,0)$ è definita negativa.*

(d) *La matrice hessiana di F in $(1,0)$ è semi-definita negativa.*

(e) *La matrice hessiana di F in $(1,0)$ non è ne semi-definita positiva ne semi-definita negativa.*

Esercizio 17. *Consideriamo la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*

$$F(x,y) = e^{xy+y^2}$$

Nel quale dei punti la matrice Hessiana di F è definita positiva ?

(a) $(0,0)$

(b) $(1,1)$

(c) $(0, 1/2)$

(d) $(0,2)$

(e) *La matrice hessiana non è definita positiva in nessuno dei punti indicati.*

Esercizio 18. *Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2. Scrivere il gradiente e la matrice hessiana della funzione F^2. Quali delle affermazioni seguenti sono corrette?*

(a) *Se $F(0,0) = 0$, allora la matrice hessiana di F^2 è semi-definita positiva.*

(b) *Se $F(0,0) = 0$ e $\nabla F(0,0) = (0,0)$, allora la matrice hessiana di F^2 è semi-definita positiva.*

(c) *Se $F(0,0) = 0$ e $\nabla F(0,0) \neq (0,0)$, allora la matrice hessiana di F^2 è semi-definita positiva.*

(d) *Se $F(0,0) > 0$ e $\nabla F(0,0) = (0,0)$, allora la matrice hessiana di F^2 è semi-definita positiva.*

(e) *Se* $F(0,0) > 0$ *e* $\nabla F(0,0) = (0,0)$ *e* $D^2F(0,0) \geq 0$, *allora la matrice hessiana di* F^2 *è semi-definita positiva.*

(f) *Se* $F(0,0) > 0$ *e* $\nabla F(0,0) \neq (0,0)$ *e* $D^2F(0,0) \geq 0$, *allora la matrice hessiana di* F^2 *è semi-definita positiva.*

Esercizio 19. *Sia* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *una funzione di classe* C^2. *Scrivere il gradiente e la matrice hessiana della funzione* e^F. *Quali delle affermazioni seguenti sono corrette?*

(a) *Se* $F(0,0) = 0$, *allora la matrice hessiana di* e^F *è semi-definita positiva.*

(b) *Se* $F(0,0) = 0$ *e* $\nabla F(0,0) = (0,0)$, *allora la matrice hessiana di* e^F *è semi-definita positiva.*

(c) *Se* $F(0,0) = 0$ *e* $\nabla F(0,0) \neq (0,0)$, *allora la matrice hessiana di* e^F *è semi-definita positiva.*

(d) *Se* $F(0,0) > 0$ *e* $\nabla F(0,0) = (0,0)$, *allora la matrice hessiana di* e^F *è semi-definita positiva.*

(e) *Se* $F(0,0) > 0$ *e* $\nabla F(0,0) = (0,0)$ *e* $D^2F(0,0) \geq 0$, *allora la matrice hessiana di* e^F *è semi-definita positiva.*

(f) *Se* $F(0,0) > 0$ *e* $\nabla F(0,0) \neq (0,0)$ *e* $D^2F(0,0) \geq 0$, *allora la matrice hessiana di* e^F *è semi-definita positiva.*

(g) *Se* $\nabla F(0,0) \neq (0,0)$ *e* $D^2F(0,0) \geq 0$, *allora la matrice hessiana di* e^F *è definita positiva.*

(h) *Se* $\nabla F(0,0) = (0,0)$ *e* $D^2F(0,0) \geq 0$, *allora la matrice hessiana di* e^F *è definita positiva.*

(i) *Se* $D^2F(0,0) > 0$, *allora la matrice hessiana di* e^F *è definita positiva.*

Esercizio 20. *Sia* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *una funzione di classe* C^2. *Calcolare il gradiente e la matrice hessiana della funzione composta* $\cos(F) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. *Quali delle affermazioni seguenti sono corrette?*

(a) *Se* $F(0,0) = 0$, *allora la matrice hessiana di* e^F *è semi-definita positiva.*

(b) *Se* $F(0,0) = 0$ *e* $\nabla F(0,0) = (0,0)$, *allora la matrice hessiana di* e^F *è semi-definita positiva.*

(c) *Se* $F(0,0) = 0$ *e* $\nabla F(0,0) \neq (0,0)$, *allora la matrice hessiana di* e^F *è semi-definita positiva.*

(d) *Se* $F(0,0) > 0$ *e* $\nabla F(0,0) = (0,0)$, *allora la matrice hessiana di* e^F *è semi-definita positiva.*

(e) *Se* $F(0,0) > 0$ *e* $\nabla F(0,0) = (0,0)$ *e* $D^2F(0,0) \geq 0$, *allora la matrice hessiana di* e^F *è semi-definita positiva.*

(f) *Se* $F(0,0) > 0$ *e* $\nabla F(0,0) \neq (0,0)$ *e* $D^2F(0,0) \geq 0$, *allora la matrice hessiana di* e^F *è semi-definita positiva.*

(g) *Se* $\nabla F(0,0) \neq (0,0)$ *e* $D^2F(0,0) \geq 0$, *allora la matrice hessiana di* e^F *è definita positiva.*

(h) *Se* $\nabla F(0,0) = (0,0)$ *e* $D^2F(0,0) \geq 0$, *allora la matrice hessiana di* e^F *è definita positiva.*

(i) *Se* $D^2F(0,0) > 0$, *allora la matrice hessiana di* e^F *è definita positiva.*

Esercizio 21. *Sia* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *una funzione di classe* C^2. *Calcolare il gradiente e la matrice hessiana della funzione composta* $\sin(F) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. *Quali delle affermazioni seguenti sono corrette?*

(a) *Se* $F(0,0) = 0$, *allora la matrice hessiana di* e^F *è semi-definita positiva.*

(b) *Se* $F(0,0) = 0$ *e* $\nabla F(0,0) = (0,0)$, *allora la matrice hessiana di* e^F *è semi-definita positiva.*

(c) *Se* $F(0,0) = 0$ *e* $\nabla F(0,0) \neq (0,0)$, *allora la matrice hessiana di* e^F *è semi-definita positiva.*

(d) *Se* $F(0,0) > 0$ *e* $\nabla F(0,0) = (0,0)$, *allora la matrice hessiana di* e^F *è semi-definita positiva.*

(e) *Se* $F(0,0) > 0$ *e* $\nabla F(0,0) = (0,0)$ *e* $D^2F(0,0) \geq 0$, *allora la matrice hessiana di* e^F *è semi-definita positiva.*

(f) *Se* $F(0,0) > 0$ *e* $\nabla F(0,0) \neq (0,0)$ *e* $D^2F(0,0) \geq 0$, *allora la matrice hessiana di* e^F *è semi-definita positiva.*

(g) *Se* $\nabla F(0,0) \neq (0,0)$ *e* $D^2F(0,0) \geq 0$, *allora la matrice hessiana di* e^F *è definita positiva.*

(h) *Se* $\nabla F(0,0) = (0,0)$ *e* $D^2F(0,0) \geq 0$, *allora la matrice hessiana di* e^F *è definita positiva.*

(i) *Se* $D^2F(0,0) > 0$, *allora la matrice hessiana di* e^F *è definita positiva.*

Esercizio 22. *Sia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione di classe* C^2 *e sia* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *la funzione*

$$F(x,y) = f(x)f(y)$$

Calcolare il gradiente e la matrice hessiana della funzione F. *Quali delle affermazioni seguenti sono corrette ?*

(a) *Se* $f(0) = 0$, *allora* $\nabla F(0,0) = 0$.

(b) *Se* $f'(0) = 0$, *allora* $\nabla F(0,0) = 0$.

(c) *Se* $f'(0) = 0$ *e* $f''(0) > 0$, *allora la matrice hessiana di* F *è definita positiva.*

(d) *Se* $f(0) = 0$ *e* $f''(0) > 0$, *allora la matrice hessiana di* F *è definita positiva.*

(e) *Se* $f(0) > 0$ *e* $f''(0) > 0$, *allora la matrice hessiana di* F *è definita positiva.*

Esercizio 23. *Sia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione di classe* C^2 *e sia* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *la funzione*

$$F(x,y) = f(xy)$$

Calcolare il gradiente e la matrice hessiana della funzione F.

Esercizio 24. *Sia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione di classe* C^2 *e sia* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *la funzione*

$$F(x,y) = xf(y)$$

Calcolare il gradiente e la matrice hessiana della funzione F.